Cristina RUGINĂ

Simetrii ascunse şi spaţii-timp ale găurilor negre

Rezumat teză de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. dr. Virgil BĂRAN

Universitatea din Bucureşti, 2023

Rezumat teză: Simetrii ascunse şi spaţii-timp ale găurilor negre

Cristina Rugină[1]

Facultatea de Fizică
Universitatea din Bucureşti, Măgurele, România
Coordonator ştiinţific: Prof. Dr. Virgil Băran

April 20, 2023

Abstract

Această teză este despre simetriile ascunse ale spaţiilor-timp şi dă câteva exemple de spaţii-timp ale găurilor negre, cum ar fi de pildă un spaţiu-timp de 11 dimensiuni compactificat la 5 dimensiuni. Începem prin a studia simetriile ascunse ale spaţiilor-timp girostaţi Goryachev-Chaplygin şi Kovalevskaya precum si ale undelor pp Brdička-Eardley-Nappi-Witten şi descoperim faptul că aceste spaţii-timp deţin tensori conformi de rang înalt Stäckel-Killing şi Killing-Yano, un rezultat important pentru simetrii ascunse de rang înalt. După aceea ne îndreptăm spre zona teoriei corzilor si căutăm soluţii in contextul teoriei 11-dimensionale cu supersimetrie N=2, pe care apoi o compactificăm la 5 dimensiuni şi găsim microstări ale găurilor negre multiple, una necoliniară, celelalte coliniare incluse într-un spaţiu-timp Taub-NUT multi-centru in 4 dimensiuni apoi liftat la 5 dimensiuni. Se obţine un sistem de ecuaţii diferenţiale cuplate pe care îl rezolvam obţinând stări aproape BPS, când nişte supersimetrie este menţinută in contextul supergravitaţiei N=2 în 5 dimensiuni. Regularitatea soluţiilor este apoi considerată cu atenţie in asa fel încât să nu existe curbe de tip temporal închise. Apoi studiem gaura neagră Chong-Cvetič-Lü-Pope, care este o soluţie a gravitaţiei în 5 dimensiuni de minimă etalonare, care posedă o structură Sasaki deformată de torsiune. Cosntruim de asemenea un spinor Killing pentru mai sus menţionata soluţie a supergravitaţiei de minimă etalonare în 5 dimensiuni. Într-un final prezentăm un rezultat in contextul reconstrucţiei zonei de corelare, reuşind să regăsim o particulă de spin 1/2 din centrul bulkului rezolvând ceea ce se numeşte ecuaţia Dirac modulară. De asemenea prezentăm capitole de sinteză din literatura de specialitate legată de aspecte ale fizicii găurilor negre clasice şi cuantice, deoarece această teză tratează în special soluţii de găuri negre şi de asemenea o scurtă sinteză a unor rezultate

[1] *Email*: christina.rugina11@alumni.imperial.ac.uk

legate de interiorul găurilor negre, un capitol despre simetrii ascunse şi spinori Killing, un alt capitol despre supergravitaţiile in 5 dimensiuni de minimă etalonare sau fără etalonare şi o scurtă prezentare a unor aspecte ale proiectului de reconstrucţie a zonei de corelare.

1 Introducere

1.1 Popularizarea rezultatelor obţinute in Fizica Teoretică

Am pregătit pentru cititorii nespecialişti o introducere de popularizare în limba română a domeniului fizicii teoretice, într-o teză scrisă altfel în limba engleză. Scopul a fost explicarea unora dintre conceptele de bază din fizica teoretică celor cu o cunoaştere la nivelul manualelor de liceu a fizicii, precum şi un scurt istoric al fizicii moderne de la Isaac Newton încoace. În acest context introducem câte ceva din ideile lui Newton, Huygens, Fresnel şi Maxwell legate de Mecanica Clasică şi de Optică şi Electromagnetism. Apoi ne îndreptăm către sfârşitul secolului al XIX-lea când experimentul Michelson-Morley a invalidat existenţa eterului şi a demonstrat constanţa luminii în vid. Înainte de a trece la marea revoluţie înfăptuită de Mecanica Cuantică la începutul secolului XX, sunt de menţionat eforturile din termodinamică şi fizica statistică ale lui Carnot, Diesel şi Boltzmann între alţi titani ai domeniului. În secolul XX Max Planck şi Einstein (cu lucrarea despre efectul fotoelectric) sunt precursorii Mecanicii Cuantice. Einstein pune şi bazele Relativităţii Restrânse din ale cărei predicţii şi rezultate dilatarea timpului şi contracţia lungimilor sunt cele mai cunoscute la nivelul publicului larg. Sigur că tot Einstein pune şi bazele Relativităţii Generalizate cu ecuaţiile Einstein care fac legătura între spaţiu-timp şi materie, introducând noţiunea de curbură a spaţiu-timpului. Mecanica Cuantică este dezvoltată de: Schrödinger, Heisenberg, Bohr, Dirac, Compton, dar şi de Planck, Pauli, de Broglie, Mme. Curie şi Einstein. Sunt cunoscute disputele lui Einstein cu Niels Bohr pe tema lipsei de contradicţii şi a completitudinii Mecanicii Cuantice, care au stimulat ideile din domeniu ale acestor monştri sacri. Dintre cele mai cunoscute rezultate ale Mecanicii Cuantice sunt lucrul cu probabilităţi, Principiul Incertitudinii al lui Heisenberg şi dualismul undă-corpuscul. Alte domenii dezvoltate în urma apariţiei Mecanicii Cuantice sunt: Fizica Nucleară, Electrodinamica Cuantică şi Fizica Particulelor Elementare, aceasta din urmă fiind cea mai dezvoltată ramură a Fizicii contemporane, cu Modelul Standard fiind cea mai solidă şi mai spectaculoasă predicţie. Teoria Corzilor (unul dintre subiectele majore ale tezei) apare la sfârşitul anilor '60 şi devine teoria cea mai aptă pentru a descrie gravitaţia cuantică, lucrând cu obiecte extinse prin raport cu particulele elementare punctuale şi în mai mult de 4 dimensiuni spaţio-temporale. Se dovedeşte că particulele elementare sunt vibraţii ale corzilor elementare. Găurile negre şi ele au stimulat imaginaţia oamenilor şi sunt un alt subiect dominant al tezei. Paradoxul Informaţiei, al pierderii de informaţie mai precis, a fost adus în prim planul cercetării de către

Stephen Hawking şi multe rezoluţii şi dezvoltări ale subiectului s-au depănat în ultimii 50 de ani. Materia şi energia neagrua care constituie vasta majoritate a materiei din univers sunt şi ele un subiect important al cercetării moderne. Mai multe pe toate aceste teme găsiţi in cartea lui Brian Greene [1].

1.2 Introducerea in subiectul tezei pentru specialişti

Continuăm apoi cu introducerea pentru specialişti care este o sinteză a principalelor rezultate din găurile negre clasice şi cuantice. Prezentăm întâi un scurt rezumat al rezultatelor despre simetrii ascunse ale găurilor negre clasice, care nu au păr, adică sunt descrise macroscopic doar de masa, sarcina şi momentul lor cinetic. Simetriile ascunse sunt generalizări ale izometriilor şi sunt caracterizate de tensori total simetrici Stäckel-Killing şi tensori total antisimetrici Killing-Yano, vezi mai jos definiţiile. Aceşti tensori ajută la rezolvarea ecuaţiilor Klein-Gordon, Dirac, Hamilton-Jacobi şi ecuaţia geodezicei în spaţii curbate cu sau fără torsiune. Spinorii Killing care ajută la clasificarea soluţiilor de supergravitaţie sunt corelaţi cu tensori (conformi) Killing-Yano şi Stäckel-Killing şi în cadrul tezei vom determina un astfel de spinor pentru o soluţie deformată de torsiune a supergravitaţiei în 5 dimensiuni de minimă etalonare. Dincolo de simetrii ascunse şi de faptul că nu au păr, un alt rezultat clasic remarcabil este formula Bekenstein-Hawking care leagă printr-o relaţie de proportionalitate entropia unei găuri negre de aria orizontului găurii negre.

Apoi trecem în revistă câteva rezultate din literatură care privesc găurile negre cuantice, mai precis găurile negre din teoria corzilor. O preocupare in acest context este structura plasată la nivelul orizontului găurilor negre şi s-au propus de-a lungul timpului mai multe soluţii: firewalls [2], fuzzballs [3, 4], orizontul extins [5], poduri Einstein-Rosen [6] şi fotoni şi gravitoni moi [7]. O preocupare şi mai ardentă este cea legată de găsirea de rezoluţii pentru paradoxul informaţiei şi se poate spune că firewalls la nivelul orizontului găurilor negre este o încarnare a paradoxului informaţiei. Se presupune că evaporarea găurilor negre se petrece unitar, în conformitate cu principiile Mecanicii Cuantice şi acest lucru este evidenţiat şi de existenţa curbei Page [8] care descrie entropia de corelare a găurii negre cu radiaţia Hawking evaporată. Controversa firewalls cu complementaritatea găurilor negre [9] a deschis cutia Pandorei în sensul că existenţa firewalls a prezis că un observator care traverseaza orizontul găurii negre are parte de dramă în contrast cu principiile complementarităţii găurilor negre care prezic că observatorul respectiv nu simte nimic special când traversează orizontul găurii negre. În orice caz dintre rezoluţiile paradoxului informaţiei se numără şi: paradigma ER=EPR [6], paradigma fuzzball [3, 4], reconstrucţia zonei de corelare [10], insule [11], găuri de vierme replicate [12, 13], rămăşiţe [14], teoriile saci-de-aur şi universuri bulă [15] şi fotoni şi gravitoni moi [7].

Tot legat de paradoxul informaţiei este şi descrierea interiorului găurilor negre şi în acest cadru programul determinării microstărilor găurilor negre este central.

Se porneşte de la descrierea găurilor negre cu 2 sarcini - binecunsocuta gaură neagră Strominger-Vafa [16] şi se ajunge la gaura neagră cu trei sarcini [17], aceste microstări reproducând rezultatul macroscopic al entropiei Bekenstein-Hawking. Un rezultat original al acestei teze se referă la soluţii de găuri negre cu 3 sarcini. Este în general acceptat că interiorul gaurilor BPS dar şi non-BPS este dat de fuzzballs, microstări care nu au orizont dar a căror superpoziţie redă proprietăţile găurilor negre cu orizont.

2 Mărimi care descriu simetriile ascunse

Acesta este un prim capitol de sinteză a rezultatelor obţinute pe această temă în literatură şi care susţin rezultatele originale obţinute în teză. Obiectele cele mai pertinente în acest sens sunt tensorii Killing-Yano şi Stäckel-Killing a căror definiţie o găsiţi mai jos.

Definiţie 1. *Considerăm o p-formă diferenţială $Y \in \Omega^p(\mathcal{M})$ care se numeşte tensor Killing-Yano (KY) dacă $\nabla Y \in \Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ unde ∇ este conexiunea Levi-Civita pentru o metrică dată g, ceea ce înseamnă că $\nabla_\mu Y_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ este total anti-simetric.*

Definiţie 2. *Un tensor Stäckel-Killing (SK) este un tensor contravariant total simetric K de rang p peste varietatea $\mathcal{M}$, dacă este adevărat că: $\nabla^{(\mu} K^{\alpha_1 \cdots \alpha_p)} = 0$*

O altă mărime care descrie simetriile ascunse şi care are o relaţie cu anomaliile gravitaţionale cuantice care pot fi evaluate cu ajutorul lor sunt operatorii de tip Dirac introduşi mai jos.

Definiţie 3. *Operatorul introdus in [18]:*

$$D_Y = i\gamma^\mu (Y_\mu{}^\nu \nabla_\nu - \frac{1}{6} Y_{\mu\nu;\rho} \gamma^\nu \gamma^\rho) \tag{1}$$

se numeşte operator de tip Dirac cu Y un tensor KY de rang 2.

O altă mărime importantă în caracterizarea simetriilor ascunse şi pe care o vom utiliza şi în rezultatele originale sunt spinorii Killing [19].

Definiţie 4. *Spinorii Killing sunt soluţii ale ecuaţiei Dirac care sunt şi soluţii ale ecuaţiei twistorilor:*

$$\nabla_X^s \psi = -\frac{1}{n} X \vee D\psi \tag{2}$$

unde ∇_X^s este derivata covariantă spinorială, $\vee$ este produsul Clifford şi D este operatorul Dirac.

Legătura dintre spinorii Killing şi tensorii Killing-Yano este evidenţiată de urmatoarea propoziţie [19]:

Propoziţie 1. *Dacă există un spinor Killing ψ pe o varietate dată şi dacă tensorul metrică a varietăţii respective este Riemanian, atunci p-forma ω_p dată de:*

$$\omega_p(X_1, \cdots, X_p) = < [X_1 \wedge \cdots \wedge X_p] \vee \psi, \psi > \tag{3}$$

este un tensor KY pentru p impar şi CCKY pentru p par.

De notat că tensorul CCKY înseamnă tensor închis conform KY şi definiţia tensorului conform KY este dată mai jos.

Definiţie 5. *O p-formă $Y \in \Omega^p(\mathcal{M})$ este un tensor conform Killing-Yano (CKY) dacă:*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{p+1} X \lrcorner dY - \frac{1}{n-p+1} X^* \wedge d^* Y \tag{4}$$

unde X este un câmp vectorial şi X^* este dualul în raport cu metrica a vectorului X. Folosim următoarele relaţii:

$$(X^*)_a = g_{ab} X^b \tag{5}$$

şi

$$d^* = \delta = -e^a \lrcorner \nabla_a \tag{6}$$

Un tensor important care generează turnuri de tensori corespunzători simetriilor ascunse este tensorul principal conform KY (PCKY).

Definiţie 6. *Fiind dată o 2-formă închisă şi nedegenerată $h = \frac{1}{2} h_{ab} dx^a \wedge dx^b$ care satisface ecuaţia de mai jos:*

$$\nabla_X h = X^\flat \wedge \xi \tag{7}$$

unde X este un câmp arbitrar $(X^\flat)_a = g_{ab} X^b$ şi ξ este un vector primar, aceasta se numeşte tensor principal conform Killing-Yano (PCKY).

Vom utiliza toate aceste definiţii si proprietăţi in capitolele originale ale tezei.

3 Interiorul găurilor negre

Starea de dublu termocâmp este o stare foarte bine cunoscută şi înţeleasă în literatură şi descrie o gaură neagră cu două zone (stânga şi dreapta) legate printr-o gaură de vierme. Acesta este un model simplificat de interior al găurii negre eterne descrisă de funcţia de undă Hartle-Hawking transcrisă ca [20]:

$$|\Psi\rangle = \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_L \otimes |n\rangle_R \tag{8}$$

Guara neagră eternă contine o gaură de vierme care corelează zona stângă cu zona dreaptă, dar pentru că această gaură de vierme să devină traversabilă trebuie adaugată aşa-zisa deformare de urmă dublă [21]:

$$e^{i\tilde{g}V} = e^{i\tilde{g}\mathcal{O}_L(0)\mathcal{O}_R(0)} \tag{9}$$

Lucrurile sunt foarte interesante însă şi pentru găuri negre cu o singură zonă şi în acest caz de asemenea interiorul găurilor negre devine accesibil prin intermediul undelor de şoc de energie negativă. Găurile negre cu o singură zonă sunt descrise de operatori oglindă [22]. Aceşti operatori $\mathcal{O}_\omega$ pot fi determinaţi printr-o construcţie Tomita-Takesaki:

$$\tilde{\mathcal{O}}_\omega|\Psi_0\rangle = e^{-\frac{\beta H}{2}}\mathcal{O}^\dagger_\omega e^{\frac{\beta H}{2}}|\Psi_0\rangle \tag{10}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_\omega\mathcal{O}_{\omega_1}\cdots\mathcal{O}_{\omega_n}|\Psi_0\rangle = \mathcal{O}_{\omega_1}\cdots\mathcal{O}_{\omega_n}\tilde{\mathcal{O}}_\omega|\Psi_0\rangle \tag{11}$$

$$[H,\tilde{\mathcal{O}}_\omega]\mathcal{O}_{\omega_1}\cdots\mathcal{O}_{\omega_n}|\Psi_0\rangle = \omega\tilde{\mathcal{O}}_\omega\mathcal{O}_{\omega_1}\cdots\mathcal{O}_{\omega_n}|\Psi_0\rangle \tag{12}$$

Vom utiliza şi noi o construcţie Tomita-Takesaki generalizată în studiul ecuaţiei Dirac modulare (capitol original). În construcţia Tomita-Takesaki o algebră non-trivială admite o sub-algebră comutant. Această construcţie corespunde găurii negre eterne cu două zone şi este descrisă matematic în felul următor [22]:

$$SA|\Psi_0\rangle = A^\dagger|\Psi_0\rangle \tag{13}$$

$$\Delta = S^\dagger S, \qquad S = J\Delta^{1/2} \qquad \tilde{\mathcal{O}} = J\mathcal{O}J \tag{14}$$

unde $A \in \mathcal{A}$, $|\Psi_0\rangle$ este o stare tipică a găurii negre corespunzând lui E_0, S este o hartă anti-liniară generală, J este un operator anti-unitar numit conjugarea modulară şi $\tilde{\mathcal{O}}$ este operatorul oglindă.

4 Supergravitaţia în 5 dimensiuni

O soluţie a supergravitaţiei de minimă etalonare în 5 dimensiuni cu 2 momente cinetice independente şi care este neextremală cu sarcina şi desigur rotitoare este soluţia de găuri negre Chong-Cvetič-Lü-Pope (CCLP) [23] pentru care vom prezenta şi noi un rezultat original într-unul din capitolele tezei. În general supergravitaţia de etalonare în 5 dimensiuni nu admite soluţii statice, având în vedere că rotaţia este necesară pentru a evita singularităţi goale şi deci în general este necesar să studiem soluţii cu sarcină în acest caz.

Acţiunea bosonică (o reminiscenţă a corzilor bosonice in 5 dimensiuni) a supergravitaţiei de minimă etalonare in 5 dimensiuni este dată de:

$$S = \frac{1}{4\pi G}\int\left(-\frac{1}{4}(^5R - \chi^2) * 1 - \frac{1}{2}(F \wedge *F) - \frac{1}{3\sqrt{3}}F \wedge F \wedge A\right) \tag{15}$$

unde χ ţine loc de constantă cosmologică. Ecuaţiile de miscare atunci devin:

$$^5R_{\alpha\beta} + 2F_{\alpha\gamma}F_\beta{}^\gamma - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}(F^2 - \chi^2) = 0 \tag{16}$$

$$d * F - \frac{2}{\sqrt{3}}F \wedge F = 0 \tag{17}$$

Ecuaţia specifică acestei supergravitaţii pentru spinorul Killing este dată de [24]:

$$[D_\alpha + \frac{1}{4\sqrt{3}}(\gamma_\alpha{}^{\beta\gamma} - 4\delta_\alpha^\beta\gamma^\gamma)F_{\beta\gamma}]\epsilon^a - \chi\epsilon^{ab}(\frac{1}{4\sqrt{3}}\gamma_\alpha - \frac{1}{2}A_\alpha)\epsilon^b = 0 \tag{18}$$

Dacă punem $\chi = 0$ obţinem ecuaţiile pentru supergravitaţia neetalonată. Atât supergravitaţia de minimă etalonare cât şi supergravitaţia neetalonată sunt clasificate cu ajutorul vectorilor Killing şi a 2-formelor obţinute din spinori Killing conform cu propoziţia 1 din secţiunea 2.

Soluţii Sasaki-Einstein sunt şi ele posibile pentru supergravitaţia de minimă etalonare in 5 dimensiuni. Noi vom lucra cu o metrică Sasaki deformată de torsiune care este o generalizare a spaţiilor Sasaki-Einstein $L^{a,b,c}$ [25] şi care are o conexiune cu metrica CCLP menţionată mai sus:

$$g_5 = \frac{x-y}{X}dx^2 + \frac{y-x}{Y}dy^2 + \frac{X}{x-y}(d\psi_1 + yd\psi_2)^2 + \frac{Y}{y-x}(d\psi_1 + xd\psi_2)^2 +$$

$$4(d\psi_0 + (x+y)d\psi_1 + xyd\psi_2 + \frac{q_1 - q_2}{x-y}d\psi_1 + \frac{q_1y - q_2x}{x-y}d\psi_2)^2 \tag{19}$$

unde

$$X = -4x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + b_1 - 8q_1x \tag{20}$$

$$Y = -4y(y-\alpha_1)(y-\alpha_2) + b_2 - 8q_2y \tag{21}$$

si $\alpha_1, \alpha_2, b_1, b_2, q_1, q_2$ sunt parametri.

5 Aspecte ale reconstrucţiei zonei de corelare

Reconstrucţia zonei de corelare este un domeniu activ de reconstruire a interiorului găurilor negre şi a bulkului operând cu concepte gen suprafeţe Ryu-Takyanagi (RT) (care sunt generalizări ale orizontului găurilor negre în sensul că şi ele dau entropia unei regiuni ca arie a suprafeţei RT care subîntinde acea regiune), entropie generalizată, canale universale de recuperare, coduri cuantice de corectarea erorilor şi reţele de tensori, fluxul co-ciclului lui Connes [26], ceea ce vom trata aici, dar şi in capitolul original asociat.

În figura de mai jos se arată cum se poate 'vedea' in adâncimea bulkului datorită propagării undelor de şoc de energie negativă ca rezultat al fluxului co-ciclului lui Connes. Datorită acestor propagări peninsula zonei de corelare alunecă în zona cauzală, pe care ştim să o reconstruim cu construcţia HKLL [27] şi astfel mare parte din zona de corelare devine vizibilă pe frontieră.

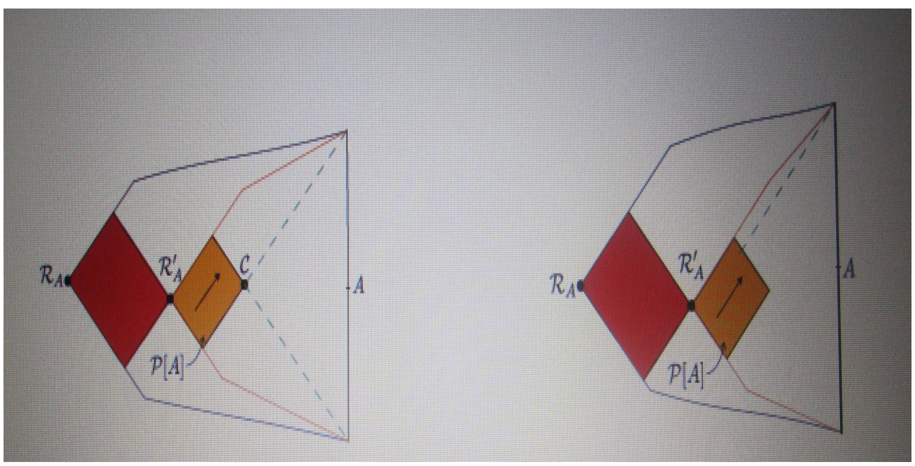

Figure 1: Imagine datorată sursei [26], adaptată. Stânga: zona de corelare este marginită de suprafaţa RT $\mathcal{R}_A$, desenată cu negru în imagine, şi zona de frontieră A; suprafaţa cea mai îndepărtată este desenată în portocaliu şi este $\mathcal{R}'_A$, în timp ce zona portocalie este peninsula $\mathcal{P}[A]$. Linia verde întreruptă delimitează zona cauzală $\mathcal{W}_C[A]$. Imaginea din dreapta: este vizibil faptul că peninsula zonei de corelare intră în zona cauzală şi deci devine visibilă datorită undelor de şoc de energie negativă.

Fluxul co-ciclului lui Connes se defineşte ca [26]:

$$|\psi_s\rangle = \otimes_{r=1}^{n} \sigma_{a_r}^{is} (\rho_a^{\psi})^{-is} |\psi\rangle \tag{22}$$

unde s este timpul modular şi operatorul unitar este definit ca:

$$u_s(\psi, a) = \otimes_{r=1}^{n} \sigma_{a_r}^{is} (\rho_a^{\psi})^{-is}. \tag{23}$$

Mai sus s-au folosit notaţiile pentru vacuum $|\Omega\rangle$ şi starea pură $|\psi\rangle$ în felul următor pentru densităţile de matrici:

$$\sigma_\Sigma = \mathrm{Tr}_{\bar{\Sigma}} |\Omega\rangle\langle\Omega| \tag{24}$$

şi

$$\rho_\Sigma^\psi = \mathrm{Tr}_{\bar{\Sigma}} |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{25}$$

Menţionăm că vom folosi şi noi fluxul co-ciclului lui Connes în capitolul original despre ecuaţia Dirac modulară.

6 Capitol original: Tensori Stäckel-Killing şi Killing-Yano de rang înalt

Acest capitol este dedicat simetriilor ascunse descrise fiind de tensori SK şi KY de rang înalt. Ne preocupăm de spaţii-timp clasice şi cuantice ale girostaţilor Goryachev-Chaplygin şi Kovalevskaya şi unde pp Brdička-Eardley-Nappi-Witten. Aici vom găsi tensori de rang 3 şi 4 KY şi CKY şi CSK în analogie cu lucrarea publicată a autoarei [28] şi cu lucrarea de pionierat în ce priveşte tensorii SK de rang mai înalt decât 2 [29]. De fapt aceşti tensori SK şi KY de rang înalt sunt generalizări la spaţii liftate cu un Eisenhart lift ale constantelor de mişcare clasice.

Vom da aici câteva exemple de rezultate noi, care extind rezultatele existente. De pildă introducem un tensor PCKY de rang 3 prin formula:

$$\nabla_c h_{abd} = 2 g_{c[a} \xi_{b]} \xi_d \tag{26}$$

şi

$$\xi_b \xi_d = \frac{1}{D-1} \nabla^a h_{abd}. \tag{27}$$

unde ξ sunt vectori Killing. A se compara formulele de mai sus care generalizează relaţia (7) scrisă pentru un PCKY de rang 2, o relaţie clasică în literatură. Reamintim că PCKY de rang 2 generează turnuri de simetrii ascunse, prin analogie PCKY de rang 3 generează turnuri de simetrii ascunse de rang înalt.

O altă generalizare este relaţia dintre PCKY de rang 3 cu tensori conformi Stäckel-Killing (CSK) de rang 3:

$$K^c_{\alpha\beta\delta} = h_{(\alpha|\mu\nu|} h_\beta{}^{|\mu\nu|} g_{\delta)\delta}. \tag{28}$$

In literatură exista anterior relaţia dintre PCKY de rang 2 cu CSK de rang 2.

În acest capitol s-au obţinut numeroase exemple de tensori de rang înalt, dar noi vom include aici un singur exemplu de PCKY de rang 3 pentru spaţiul-timp al girostatului cuantic Goryachev-Chaplygin cu metrica 5-dimensionala dată de:

$$g_{GCG} = 2dsdt + 2(4\lambda^2 + \alpha^2 x_2)dt^2 - 16\lambda ds\sigma^3 + (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + \frac{1}{4}(\sigma^3)^2, \quad (29)$$

cu notaţiile descrise în teză. În componente, PCKY de rangul 3 se scrie ca:

$$h_{123}^{QGCG} = \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + x_3\alpha^2} \qquad h_{12s}^{QGCG} = \frac{16\lambda}{3} \quad (30)$$

$$h_{32s}^{QGCG} = \frac{2\alpha^2}{\lambda^2} \qquad h_{31s}^{QGCG} = \frac{\alpha^2 x_3}{\lambda^2 + \alpha^2 x_3}. \quad (31)$$

7 Capitol original: Soluţii aproape-BPS în 5 dimensiuni

În acest capitol se efectuează un Eisenhart lift la 5 dimensiuni a soluţiei aproape BPS în 4 dimensiuni prezentată în lucrarea autoarei [30], deci prezentăm aici soluţii aproape-BPS în 5 dimensiuni, soluţii compactificate din supergravitaţia de 11 dimensiuni. Această soluţie este o liftare la 5 dimensiuni a unei soluţii de bază multi-centru Taub-NUT în cadrul supergravitaţiei de 11 dimensiuni dotată cu 3 familii de braneuri electrice M2 şi magnetice M5 cu câmpuri de etalonare 3-forme. Obţinem un sistem de ecuaţii diferenţiale cuplate cu necunoscute: câmpul dipolar 2-formă anti-self-dual Θ, forma de factori warp Z şi 1-forma moment cinetic k. Începem prin a rezolva ecuaţiile în momentul cinetic k, care se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale cuplate în scalarul μ şi 1-forma ω. Găsirea lui μ şi a lui ω înseamnă rezolvarea unui sistem de ordinul 2 de ecuaţii cu derivate parţiale cuplate. Acest sistem se reduce la un sistem de 14 ecuaţii diferenţiale decuplate care pot fi rezolvate şi în plus soluţiile omogene. Punând cap la cap aceste 15 soluţii, obţinem mult căutatele μ si ω. Apoi impunem constrângeri în aşa fel încât aceste soluţii să nu admită CTC (curbe de tip temporal închise) sau corzi Dirac-Misner. Apoi determinăm şi entropia acestor soluţii de găuri negre.

Nu avem spaţiu aici pentru a prezenta în formule rezultatele acestui capitol, dar putem lista punctul de pornire şi anume metrica 11 dimensională cu cele trei famillii de braneuri electrice M2 şi magnetice M5 şi 3-forma câmpurilor de etalonare:

$$ds_{11}^2 = -(Z_1Z_2Z_3)^{-2/3}(dt+k)^2 + (Z_1Z_2Z_3)^{1/3}ds_4^2 + (\frac{Z_2Z_3}{Z_1^2})^{1/3}(dx_1^2 + dx_2^2)$$

$$+ (\frac{Z_1Z_3}{Z_2^2})^{1/3}(dx_3^2 + dx_4^2) + (\frac{Z_1Z_2}{Z_3^2})^{1/3}(dx_5^2 + dx_6^2) \quad (32)$$

$$C^{(3)} = (a^1 - \frac{dt+k}{Z_1}) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + (a^2 - \frac{dt+k}{Z_2}) \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (a^3 - \frac{dt+k}{Z_3}) \wedge dx_5 \wedge dx_6 \tag{33}$$

unde dx_4^2 este metrica 4-dimensională hyper-Kähler cu o curbură self-duală. Apoi Z_I sunt factorii warp şi $\Theta^{(I)} = da^I$ sunt câmpurile dipolare anti-self-duale şi k este 1-forma moment cinetic. Cu acest punct de pornire ecuaţiile aproape-BPS sunt [31]:

$$\Theta^{(I)} = -*_4 \Theta^{(I)} \tag{34}$$

$$d *_4 dZ_I = \frac{C_{IJK}}{2} \Theta^{(I)} \wedge \Theta^{(I)} \tag{35}$$

$$dk - *_4 dk = Z_I \Theta^{(I)} \tag{36}$$

care rezolvate conduc la soluţia unui număr de N găuri negre coliniare şi una necoliniară, deci prototipul unei soluţii cu trei centri necoliniari.

8 Capitol original: Simetrii ale soluţiei Kerr-de Sitter în 5 dimensiuni

Este binecunoscut faptul că soluţia de găuri negre Chong-Cvetič-Lü-Pope (CCLP) [23] (soluţia Kerr-de Sitter) a supergravitaţiei de minimă etalonare în 5 dimensiuni este echivalentă cu o metrică Sasaki deformată de torsiune [25], vezi forma metricii dată de ecuaţia (19). Pentru această soluţie găsim 2 tensori noi KY şi SK corespunzând simetriilor ascunse ale spaţiului. De menţionat că de fapt aceşti tensori sunt generalizaţi, deoarece spaţiul este dotat cu torsiune, rol jucat de Hodge dualul câmpului electromagnetic al spaţiului. Am scris acţiunea şi ecuaţiile de mişcare pentru supergravitaţia de minimă etalonare în 5 dimensiuni în ecuaţiile (15), (16), (17).

Acest spaţiu-timp admite 2 tensori noi generalizaţi conformi închisi KY după cum urmează:

$$h_1 = \sqrt{4X}\tilde{\omega^x} \wedge \omega^\epsilon + \sqrt{Y}\tilde{\omega^y} \wedge \omega^\epsilon \tag{37}$$

şi

$$h_2 = \sqrt{-xy}\omega^x \wedge \omega^\epsilon + \sqrt{-xy}\omega^y \wedge \omega^\epsilon \tag{38}$$

Şi încă doi tensori generalizaţi SK:

$$K_1 = (x-y)\tilde{\omega^y}\omega^\epsilon + x\tilde{\omega^x}\omega^y, \tag{39}$$

respectiv,

$$K_2 = (x-y)\tilde{\omega^x}\omega^\epsilon + y\omega^x\tilde{\omega^y}. \tag{40}$$

Şi în fine doi tensori generalizaţi KY:

$$Y_1 = \sqrt{x-y}\omega^x \wedge \omega^y \wedge \tilde{\omega^y} + \sqrt{-x}\omega^x \wedge \tilde{\omega^x} \wedge \omega^y \tag{41}$$

şi

$$Y_2 = \sqrt{x-y}\tilde{\omega^x} \wedge \omega^y \wedge \tilde{\omega^y} + \sqrt{-y}\omega^x \wedge \tilde{\omega^y} \wedge \tilde{\omega^x}. \tag{42}$$

Pe lângă acest rezultat care completează literatura reprezentată de [32] se obţine şi un spinor Killing pentru metrica CCLP, spinor care respectă ecuaţia (18). Se porneşte de la ansatz-ul:

$$\epsilon_i = (e^{\frac{i}{2}\gamma^i(\xi-k-x_i)M})_j^{\ k}(\delta_i^j(\xi-k-x^\alpha)(\gamma_\alpha{}^{\beta\delta}-\delta_\alpha^\beta\gamma^\delta)F_{\beta\delta}+$$

$$+\frac{i\epsilon^{jl}}{2}\chi(\xi-k-x^\alpha)\gamma_\alpha(M_{il}-i\delta_{il}A_\alpha\gamma^\alpha))\xi_k, \tag{43}$$

unde $M = \vec{x}\vec{\sigma}$ şi $\vec{\sigma}$ sunt matricile Pauli, ξ şi k sunt parametri liberi ai metricii CCLP în forma deformată de torsiune. După calcule laborioase se demonstrează că acest ansatz verifică ecuaţia (18) şi astfel s-a găsit spinorul Killing al acestui spaţiu.

9 Capitol original: Ecuaţia Dirac modulară

În acest capitol prezentăm ecuaţia de evoluţie a unui spin 1/2 aflat la centrul bulkului unui spaţiu AdS_2 de-a lungul unei găuri de vierme inclusă într-un spaţiu mai înalt dimensional conectând centrul bulkului cu frontiera spaţiului, ecuaţia Dirac modulară. Acest rezultat se înscrie în seria rezultatelor de reconstrucţie a zonei de corelare care s-ar dori o rezoluţie a paradoxului informaţiei. În acest capitol construim şi rezolvăm ecuaţia Dirac modulară, apoi investigăm simetriile ascunse ale spaţiului AdS_2. Apoi prezentăm proprietăţi ale operatorului Dirac modular şi subliniem relaţia cu construcţia Tomita-Takesaki, teoria Schwarziană, regeneza şi stabilim unele limitări ale acestor rezultate.

Ecuaţia Dirac modulară se scrie ca [33]:

$$(\cosh x_{-1}(\overleftrightarrow{D}^{1+is}) - m)\psi_s = 0. \tag{44}$$

unde D reprezintă operatorul Dirac în coordonate ρ, t şi

$$\alpha\overleftrightarrow{D}\beta = \alpha D\beta - \beta D\alpha \tag{45}$$

cu ψ_s un fibrat de spinori-

$$(\mathcal{D}\psi : \mathcal{D}\psi)_s |\psi\rangle = |\psi_s\rangle. \tag{46}$$

unde definiţia co-ciclului Connes este dată de [26]:

$$(\mathcal{D}\phi : \mathcal{D}\psi)_s \equiv \Delta^{is}_{k|\phi} \Delta^{-is}_{k|\psi} = \Delta^{is}_{\phi} \Delta^{-is}_{\phi|\psi} \tag{47}$$

Soluţia acestei ecuaţii este dată de [34]:

$$E_\mu(\rho) = \frac{1+e^{-i\pi\mu}}{2} \frac{e^{-i\pi}}{2^{\mu-1}\pi^{(\mu-1)/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu)} D_0^{1/2}(\rho) -$$

$$- \frac{1-e^{i\pi\mu}}{2} \frac{e^{-i\pi(m-\mu)/2}}{2^{\mu-1}\pi^{(m-1)/2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}(1+\mu))} \left(D^1_{-1}(\rho) - \sinh\rho D^1_0(\rho) \right) \tag{48}$$

unde D este funcţia Gegenbauer definită în [35]:

$$D^\lambda_\nu(z) = \frac{2^{(1-2\lambda)}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2\lambda)}{\nu!\Gamma(\lambda)} {}_2F_1(-\nu; \nu+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}) \tag{49}$$

Dintre proprietăţi evidenţiem aici legătura operatorului Dirac modular cu construcţia Tomita-Takesaki (vezi ecuaţiile(13), (14)). Pentru a vedea acest lucru introducem transformata Fourier a operatorului Dirac modular:

$$D_\omega^{1+\overset{\leftrightarrow}{is}+i2\pi n} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} D^{1+\overset{\leftrightarrow}{is}+i2\pi n} \tag{50}$$

Acum putem introduce algebra generalizată von Neumann de tip I_∞, algebra $\mathcal{A}$ după cum urmează:

$$\mathcal{A} = span\{D_{\omega_1}, \cdots, D_{\omega_n}, \cdots\} \tag{51}$$

aici $D_{\omega_n} = D_\omega^{1+\overset{\leftrightarrow}{is}+i2\pi n}$. De notat că această algebră este dotată cu o infinitate de comutanţi, spre deosebire de construcţia Tomita-Takesaki obişnuită şi sunt algebrele $\mathcal{A}'_n$ von Neumann generalizate de tip I. Şi aceste algebre sunt formate din operatori mărginiţi:

$$\mathcal{A}'_n = span\{D_{\omega_1}, \cdots, D_{\omega_n}\}. \tag{52}$$

10 Concluzii

Am prezentat în această teză rezultate despre simetrii ascunse, dar şi rezoluţii ale paradoxului informaţiei, de la soluţii de microstări ale găurilor negre lipsite de orizont, pâna la un rezultat de reconstrucţie de bulk. Am lucrat cu supergravitaţii în 5 dimensiuni şi în 11 dimensiuni, care în fond sunt legate prin acţiunea similară în cele două cazuri. Ne preocupăm aici de găuri negre cuantice şi în teoria corzilor, soluţii ale ecuaţiilor lui Einstein, dar şi nişte soluţii pe altfel de spaţii (girostaţi Goryachev-Chaplygin, Kovalevskaya, unde pp şi AdS_2). Spaţiile girostaţi şi undele pp sunt soluţii integrabile, cazuri în care diverse ecuaţii cum ar fi Klein-Gordon, Dirac şi aşa mai departe sunt separabile. Găsim soluţii aproape BPS în 5 dimensiuni, dar şi un spinor Killing pentru o formă a metricii Sasaki deformată de torsiune pentru una dintre cele mai cunoscute soluţii ale supergravitaţiei de minimă etalonare în 5 dimensiuni, gaura neagră cea mai generală neextremală rotitoare cu două momente cinetice. Găsim de asemenea conexiuni ale operatorului Dirac modular cu construcţia Tomita-Takesaki, teoria Schwarziană şi regeneza. În general însă ne preocupăm de simetrii ascunse şi spaţii-timp ale găurilor negre.

References

[1] B. Greene, The fabric of the cosmos, spacetime and the texture of reality, Vintage Books, (2005).

[2] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, and J. Sully, Black Holes: Complementarity or Firewalls?, *JHEP* **1302** (2013) 062, arxiv: 1207.3123.

[3] S. D. Mathur, The information paradox: A pedagogical introduction, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224001, arxiv:0909.1038.

[4] S. D. Mathur, The fuzzball proposal for black holes: An elementary review, *Fortsch. Phys.* **53** (2005) 793, hep-th/0502050.

[5] L. Susskind, L. Thorlacius, J. Uglum, The stretched horizon and black hole complementarity, *Phys.Rev.D* **48** (1993) 3743, hep-th/9306069.

[6] J. Maldacena, L. Susskind, Cool horizons for entangled black holes, *Fortsch. Phys.* **61** (2013) 781, arxiv: 1306.0533.

[7] S. W. Hawking, M. J. Perry, A. Strominger, Soft Hair on Black Holes, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 231301, arxiv:1601.00921.

[8] D. Page, Information in black hole radiation, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3743 (1993), hep-th/9306083.

[9] L. Susskind, Singularities, Firewalls, and Complementarity, arXiv: 1208.3445.

[10] D. Xi, D. Harlow, A. C. Wall, Reconstruction of bulk operators within the entanglement wedge in gauge-gravity duality, *Phys Rev Lett,* **117** (2016) 021601, arxiv: 1601.05416.

[11] A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena, Islands outside the horizon, arxiv: 1910.11077.

[12] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, A. Tajdini, Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation, *JHEP* **05** (2020) 013, arxiv: 1911.12333.

[13] A. Almheiri, N. Engelhardt, D. Marolf, H. Maxfield, The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole, *JHEP* **12** (2019) 063, arXiv:1905.08762.

[14] P. Chen, Y.C. Ong, D. Yeom, Black hole remnants and the information loss paradox, *Phys.Rept.* **603** (2015) 1, arxiv:1412.8366.

[15] J. Wheeler, Geometrodynamics and the Issue of the Final State, in Relativity, Groups, and Topology, 1963 Les Houches Lectures (B. S. DeWitt and C. M. DeWitt, eds.), Gordon and Breach, New York, (1964).

[16] A. Strominger and C. Vafa, Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy, *Phys. Lett. B* **379** (1996) 99, hep-th/9601029.

[17] S. D. Mathur, The information paradox: A pedagogical introduction, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224001, arxiv:0909.1038.

[18] B. Carter, R. G. McLenaghan, Generalized total angular momentum operator for the Dirac equation in curved spacetime, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 1093.

[19] S. Grigorian, Yano tensors, Mathematical Tripos thesis, DAMTP, University of Cambridge, (2005).

[20] J. Maldacena, Eternal black holes in anti-de Sitter, *JHEP* **04** (2003) 021, hep-th/0106112.

[21] P. Gao, D.L. Jafferis, A.C. Wall, Traversable wormholes via a double trace deformation, *JHEP* **12** (2017) 151, arxiv: 1608.05687.

[22] J. de Boer, R. van Breukelen, S.F. Lokhande, K. Papadodimas, E. Verlinde, Probing typical black hole microstates, *JHEP* **01** (2020) 062, arxiv: 1901.08527.

[23] Z.-W. Chong, M. Cvetič, H. Lü, C.N. Pope, General non-extremal rotating black holes in minimal 5-dimensional gauged supergravity,*Phys.Rev.Lett.* **95** (2005) 161301, hep-th/0506029.

[24] J.P. Gauntlett, J.B. Gutowski, All supersymmetric solutions of minimal gauged supergravity in 5 dimensions, *Phys.Rev.D* **68** (2003) 105009; Erratum-ibid.D70 (2004) 089901, hep-th/0304064.

[25] T. Houri, H. Takeuchi, Y. Yasui, A Deformation of Sasakian Structure in the Presence of Torsion and Supergravity Solutions, *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 135008, arxiv: 1207.0247.

[26] A. Levine, A. Shabhazi-Moghaddam, R.M. Soni, Seeing the entanglement wedge, *JHEP* **06** (2021) 134, arxiv: 2009.11305.

[27] A. Hamilton, D. N. Kabat, G. Lifschytz, D. A. Lowe, Holographic representation of local bulk operators, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 066009, hepth/0606141.

[28] G. W. Gibbons, C. Rugina, Goryachev-Chaplygin, Kovalevskaya and Brdička-Eardley-Nappi-Witten pp-waves spacetimes with higher rank Stäckel-Killing tensors, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 122901, arXiv: 1107.5987.

[29] G.W. Gibbons, T. Houri, D. Kubiznak, C.M. Warnick, Some spacetimes with higher rank Killing-Stäckel tensors, *Phys Lett B* **700** (2011) 68, arxiv: 1103.5366.

[30] C. Rugina, A. Ludu, Almost-BPS solutions in multi-center Taub-NUT, *Grav. Cosmol.* **23** (2017) 320, arXiv: 1307.2128.

[31] I. Bena, S. Giusto, C. Ruef, N.P. Warner, Multi-center non-BPS black holes- the Solution, *JHEP* **0911** (2009) 032, arxiv:0908.2121.

[32] D. Kubiznak, H.K. Kunduri, Y. Yasui, Generalized Killing-Yano equations in D=5 gauged supergravity, *Phys. Lett. B* **678** (2009) 240, arxiv: 0905.0722.

[33] C. Rugina, The modular Dirac equation, *Gen. Rel. Grav.* **54** (2022) 125, arxiv: 2204.01428.

[34] D. Eelbode, Arbitrary complex powers of the Dirac operator on the hyperbolic unit ball, *Ann. Acad. Scient. Fenn. Math* **29** (2004) 367.

[35] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Nat. Bur. Stand., App. Math Series 55 (1964).